

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»**

СОГЛАСОВАНО

Директор ИБСиБ

_____ А.В. Васин

«30» мая 2025 г.

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИФиМ

_____ П.В. Захаров

«12» ноября 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

«Вычислительная математика»

Разработчик

Кафедра высшей математики

Направление (специальность)
подготовки

06.05.01 Биоинженерия и биоинформатика

Наименование ООП

06.05.01_01 Биоинженерия и биоинформатика

Квалификация (степень)
выпускника

биоинженер и биоинформатик

Образовательный стандарт

СУОС

Форма обучения

Очная

СОГЛАСОВАНО

Руководитель ОП

_____ Д.И. Богомаз

«29» августа 2025 г.

Соответствует СУОС

Утверждена протоколом заседания
кафедры "КВМ"

от «29» августа 2025 г. № 1

РПД разработали:

Доцент, к.б.н. Д.И. Богомаз

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н., проф. И.В. Сысоев

1. Цели и планируемые результаты изучения дисциплины

Цели освоения дисциплины

1. Учебная дисциплина 'Вычислительная математика (часть 1)' относится к циклу общеобразовательных дисциплин направления
2. 'Математическое обеспечение и администрирование информационных систем'.
3. Она имеет своей целью формирование у студентов фундаментальных знаний о математических основах численных методов, устойчивых навыков применения
4. основных методов вычислительной математики для решения реальных инженерных задач, в том числе с использованием прикладных математических пакетов.

Результаты обучения выпускника

Код	Результат обучения (компетенция) выпускника ООП
ОПК-2	Способен использовать специализированные знания фундаментальных разделов математики, физики, химии и биологии для проведения исследований в области биоинженерии, биоинформатики и смежных дисциплин (модулей)
ИД-11 ОПК-2	Использует специализированные знания фундаментальных разделов вычислительной математики для проведения исследований в области биоинженерии, биоинформатики и смежных дисциплин (модулей)

Планируемые результаты изучения дисциплины

знания:

- Знание фундаментальных разделов вычислительной математики для проведения исследований в области биоинженерии, биоинформатики и смежных дисциплин (модулей)

умения:

- Умение использовать специализированные знания фундаментальных разделов вычислительной математики для проведения исследований в области биоинженерии, биоинформатики и смежных дисциплин (модулей)

навыки:

- Владение специализированными знаниями фундаментальных разделов вычислительной математики для проведения исследований в области биоинженерии, биоинформатики и смежных дисциплин (модулей)

2. Место дисциплины в структуре ООП

В учебном плане дисциплина «Вычислительная математика» относится к модулю «Модуль цифровых компетенций (Digital)».

Изучение дисциплины базируется на результатах освоения следующих дисциплин:

- Высшая математика

3. Распределение трудоёмкости освоения дисциплины по видам учебной работы и формы текущего контроля и промежуточной аттестации

3.1. Виды учебной работы

Виды учебной работы	Трудоёмкость по семестрам
	Очная форма
Лекционные занятия	14
Лабораторные занятия	30
Самостоятельная работа	19
Часы на контроль	5
Промежуточная аттестация (зачет)	4
Общая трудоёмкость освоения дисциплины	72, ач
	2, зет

3.2. Формы текущего контроля и промежуточной аттестации

Формы текущего контроля и промежуточной аттестации	Количество по семестрам
	Очная форма
Промежуточная аттестация	
Зачеты, шт.	1

4. Содержание и результаты обучения

4.1 Разделы дисциплины и виды учебной работы

№ раздела	Разделы дисциплины, мероприятия текущего контроля	Очная форма		
		Лек, ач	Лаб, ач	СР, ач
1.	Численное решение нелинейных уравнений			
1.1.	Метод деления отрезка пополам	1	1	0
1.2.	Метод Ньютона и его обобщения	1	1	1
2.	Численные методы линейной алгебры			

2.1.	Расчёт определителя рекурсивно	1	2	0
2.2.	Эквивалентные преобразования матрицы, сведение к треугольной	1	4	1
2.3.	QR разложение матрицы	1	2	1
3.	Аппроксимация и интерполяция			
3.1.	Аппроксимация полиномами, метод наименьших квадратов	1	2	1
3.2.	Интерполяция полиномами Лагранжа	1	2	0
3.3.	Интерполяция кубическими сплайнами	1	4	4
4.	Численное дифференцирование и интегрирование			
4.1.	Численное дифференцирование со сглаживанием	1	2	0
4.2.	Численное интегрирование методами прямоугольников, трапеций, Симпсона	1	2	1
5.	Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений			
5.1.	Решение уравнения первого порядка методами Эйлера и Рунге-Кутты 2-го порядка	1	2	2
5.2.	Методы Рунге-Кутты 4-го порядка для одного уравнения первого порядка	1	2	2
5.3.	Сведение уравнений высших порядков к системе уравнений. Решение методом Эйлера	1	2	2
5.4.	Решение системы уравнений методами Рунге-Кутты высших порядков	0	1	2
5.5.	Решение стохастических уравнений	1	1	2
Итого по видам учебной работы:		14	30	19
Зачеты, ач				5
Часы на контроль, ач				5
Промежуточная аттестация (зачет)		4		
Общая трудоёмкость освоения: ач / зет		72 / 2		

4.2. Содержание разделов и результаты изучения дисциплины

Раздел дисциплины	Содержание
1. Численное решение нелинейных уравнений	
1.1. Метод деления отрезка пополам	Понятие приближённого решения нелинейного уравнения. Теоремы о существовании корней. Метод деления отрезка пополам для поиска корня на некотором промежутке: алгоритм, сходимость. Реализация на компьютере и проверка решения. Вопрос о существовании нескольких корней на промежутке. Скорость сходимости. Точность вычисления и предел числа итераций. Зависимость точности от числа итераций. Погрешности.
1.2. Метод Ньютона и его обобщения	Метод Ньютона (касательных) для поиска корня вблизи начального приближения. Сходимость метода Ньютона. Реализация на компьютере и проверка решения. Зависимость точности от числа итераций. Сопоставление с методом деления отрезка пополам. Методы Крылова-Ньютона.
2. Численные методы линейной алгебры	
2.1. Расчёт определителя рекурсивно	Расчёт определителей матриц размером 1×1 , 2×2 , 3×3 по явной формуле. Рекурсивный алгоритм через разложение на миноры по первой строке (столбцу) — реализация на компьютере и проверка решения. Вычислительная сложность рекурсивного алгоритма. Решение систем линейных уравнений методом Крамера на основе рекурсивного расчёта определителя.
2.2. Эквивалентные преобразования матрицы, сведение к треугольной	Сведение матрицы к треугольному виду эквивалентными преобразованиями: теория и алгоритм, реализация на компьютере. Случай наличия нулей на главной диагонали. Плохо обусловленные и разреженные матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса на основе сведения определителя к треугольному виду.
2.3. QR разложение матрицы	Задача о построении базиса в многомерном пространстве. Идея QR-декомпозиции матрицы. Процесс Грама-Шмидта: теория и реализация в виде подпрограммы. Решение системы линейных уравнений с использованием QR-разложения.
3. Аппроксимация и интерполяция	

3.1. Аппроксимация полиномами, метод наименьших квадратов	Понятие аппроксимации. Аппроксимация точек кривою. Понятие шумов и случайных добавок в данных. Разложение по базису. Аппроксимирующие степенные многочлены. Сведение задачи аппроксимации к задаче наименьших квадратов. Решение задачи о МНК через решение системы линейных уравнений. Решение задачи на наименьшие квадраты через QR-разложение. Точность методов, ошибки вычислений.
3.2. Интерполяция полиномами Лагранжа	Понятия интерполяции и экстраполяции. Интерполяционные многочлены Лагранжа. Численная реализация алгоритма расчёта коэффициентов полинома. Расчёт значений полинома вне узлов интерполяции и построение графиков.
3.3. Интерполяция кубическими сплайнами	Понятие сплайна, линейные и кубические сплайны. Уравнения для вычисления коэффициентов кубических сплайнов. Расчёт коэффициентов сплайна: сведение задачи к решению системы линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей, методом прогонки. Расчёт значений сплайна при найденных коэффициентах. Дифференцирование с помощью сплайнов.
4. Численное дифференцирование и интегрирование	
4.1. Численное дифференцирование со сглаживанием	Постановка задачи численного дифференцирования, её практическое значение. Метод первой разности, методы взвешанных разностей и их недостатки. Сглаживание полиномом с использованием явной формулы: аналитический вывод для линейного и квадратичного случая, компьютерная реализация, сопоставление точности. Сглаживание полиномом произвольного порядка, сведение задачи к задаче аппроксимации полиномом и её решение методом наименьших квадратов, получение набора производных.
4.2. Численное интегрирование методами прямоугольников, трапеций, Симпсона	Приближение определённого интеграла, интеграл как площадь. Методы первого порядка: прямоугольников и трапеций, их эквивалентность, реализация на компьютере. Методы второго порядка — метод Симпсона. Сведение задачи о численном расчёте первообразной к задаче приближённого вычисления определённого интеграла.
5. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	

5.1. Решение уравнения первого порядка методами Эйлера и Рунге-Кутты 2-го порядка	Постановка задачи Коши, понятие разностной схемы. Схема Эйлера 1-го порядка, её реализация на компьютере, проверка для уравнений, имеющих аналитическое решение, сопоставление аналитического и численного решений в зависимости от шага. Метод Рунге-Кутты 2-го порядка, реализация, сопоставление с методом Эйлера. Методы подбора шага интегрирования, адаптивный шаг.
5.2. Методы Рунге-Кутты 4-го порядка для одного уравнения первого порядка	Методы Рунге-Кутты 4-го порядка: множество алгоритмов, стандартные коэффициенты, геометрический смысл. Реализация метода на компьютере, сопоставление с методами 1-2 порядков по точности.
5.3. Сведение уравнений высших порядков к системе уравнений. Решение методом Эйлера	Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера. Сведение задачи о решении уравнений высших порядков, разрешённых относительно старшей производной, к системе уравнений. Программирование, в том числе с использованием векторных типов данных. Сопоставление с аналитическим решением на примере линейного осциллятора.
5.4. Решение системы уравнений методами Рунге-Кутты высших порядков	Решение систем уравнений и уравнений высших порядков методами Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом. Сопоставление с результатами решения методом Эйлера на примере гармонического осциллятора. Оценки погрешности решения. О диссипативных системах.
5.5. Решение стохастических уравнений	Понятие стохастического уравнения. Уравнения с шумом первого и второго порядков. Решение методами Эйлера и Рунге-Кутты 2-го порядка, сопоставление результатов. Пример решения уравнения линейного осциллятора с шумом.

5. Образовательные технологии

В преподавании дисциплины используются преимущественно традиционные образовательные технологии: лекции; практические занятия. Для выполнения лабораторных работ требуется распространенное математическое программное обеспечение, например, можно использовать Microsoft Excel.

6. Лабораторный практикум

№ раздела	Наименование лабораторных работ	Трудоемкость, ач
		Очная форма
1.	ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДМЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ	3
2.	ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ	3
3.	АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТАБЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ	5
4.	ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ	4
5.	ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ	3
6.	ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	3
7.	ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ	5
8.	ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ	4
Итого часов		30

7. Практические занятия

Не предусмотрено

8. Организация и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

Примерное распределение времени самостоятельной работы студентов

Вид самостоятельной работы	Примерная трудоемкость, ач
	Очная форма
Текущая СР	
работа с лекционным материалом, с учебной литературой	3
опережающая самостоятельная работа (изучение нового материала до его изложения на занятиях)	3
самостоятельное изучение разделов дисциплины	0
выполнение домашних заданий, домашних контрольных работ	3
подготовка к лабораторным работам, к практическим и семинарским занятиям	2
подготовка к контрольным работам, коллоквиумам	3
Итого текущей СР:	14
Творческая проблемно-ориентированная СР	
выполнение расчётно-графических работ	2
выполнение курсового проекта или курсовой работы	0
поиск, изучение и презентация информации по заданной проблеме, анализ научных публикаций по заданной теме	2
работа над междисциплинарным проектом	0
исследовательская работа, участие в конференциях, семинарах, олимпиадах	0
анализ данных по заданной теме, выполнение расчётов, составление схем и моделей на основе собранных данных	1
Итого творческой СР:	5
Общая трудоемкость СР:	19

9. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

9.1. Адрес сайта курса

<https://dl.spbstu.ru/enrol/index.php?id=277>

9.2. Рекомендуемая литература

Основная литература

№	Автор, название, место издания, издательство, год (годы) издания	Год изд.	Источник
1	Пак В.Г., Черкасова Т.Х. Методы вычислительной математики, 2017. URL: https://openedu.ru/course/spbstu/NUMMETH/	2017	ЭБ СПбПУ

Дополнительная литература

№	Автор, название, место издания, издательство, год (годы) издания	Год изд.	Источник
1	Иванов Б.С. Вычислительная механика, 2008. URL: http://elib.spbstu.ru/dl/1642.ppt	2008	ЭБ СПбПУ

Ресурсы Интернета

1. Курс численных методов Национального открытого университета «ИНТУИТ»: <https://www.intuit.ru/studies/courses/2317/617/info>

9.3. Технические средства обеспечения дисциплины

Технические средства обеспечения дисциплины

Практические занятия проходят в компьютерных классах с современными компьютерами и интерактивными средствами.

Это экран и проектор и соответствующее программное обеспечение

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Технические средства обеспечения дисциплины

При изучении дисциплины используются на практических занятиях компьютеры с необходимым прикладное программным обеспечением.

Материально-техническое обеспечение дисциплины

Доступны математические программные пакеты Mathlab и Mathcad. Microsoft Excel.

11. Критерии оценивания и оценочные средства

11.1. Критерии оценивания

Для дисциплины «Вычислительная математика» формой аттестации является зачёт. Оценивание качества освоения дисциплины производится с использованием рейтинговой системы.

Зачёт

Для получения зачёта необходимо набрать минимум 40 баллов из 100.

Качество усвоения студентом дисциплины оценивается зачетом.

Текущие контрольные мероприятия включают расчётные задания.

Допускается выставление зачёта автоматом при успешной сдаче в течение семестра контрольных работ, выполнении расчётных заданий. Таким образом, итоговая оценка является результатом контроля работы студента в течение всего периода изучения дисциплины.

11.2. Оценочные средства

Примерные вопросы к зачету

1. Источники и классификация погрешностей результатов численных экспериментов и приближённых вычислений. Абсолютная и относительная погрешности. Верные и сомнительные цифры. Правила округления. Погрешности арифметических операций.
2. Погрешность функции
3. Особенности математических вычислений, реализуемых на ЭВМ. Представление чисел в памяти ЭВМ. Корректность и обусловленность вычислительной задачи. Классификация вычислительных методов. Характеристики численных алгоритмов.
4. Задача приближённого вычисления функций. Задача интерполяции. Интерполяция обобщёнными многочленами.
5. Полиномиальная интерполяция.
6. Погрешность полиномиальной интерполяции.
7. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
8. Схема Эйткена.
9. Разделённые разности, их свойства. Интерполяционные многочлены Ньютона с разделёнными разностями.
10. Конечные разности, их свойства. Интерполяционные многочлены Ньютона с конечными разностями.
11. Интерполяционная формула Гаусса.
12. Интерполяционная формула Стирлинга.

13. Интерполяционная формула Бесселя.
14. Задача аппроксимации. Аппроксимация методом наименьших квадратов. Полиномиальная аппроксимация методом наименьших квадратов.
15. Глобальная интерполяция. Задача равномерного приближения функции. Многочлены Чебышева. Минимизация остаточного члена интерполяционного многочлена.
16. Методы локальной интерполяции. Определение сплайна. Интерполяционная формула Эрмита.
17. Построение кубического интерполяционного сплайна. Погрешность приближения кубическим сплайном.
18. Дискретное преобразование Фурье.
19. Быстрое преобразование Фурье.
20. Преобразование Уолша-Адамара.
21. Задача численного дифференцирования. Разностные формулы первой производной.
22. Разностные формулы второй производной.
23. Обусловленность разностных формул численного дифференцирования.
24. Задача численного интегрирования. Квадратурные формулы. Простейшие квадратурные формулы. Формулы прямоугольников.
25. Квадратурные формулы трапеций и парабол (Симпсона).
26. Оценки погрешностей квадратурных формул левых и правых прямоугольников.
27. Оценки погрешностей квадратурных формул трапеций и парабол (Симпсона).
28. Квадратурные формулы интерполяционного типа (Ньютона-Котеса).
29. Квадратурные формулы Гаусса.
30. Нормы векторов и матриц. Задача численного решения систем линейных алгебраических уравнений, её обусловленность.
31. Прямые методы численного решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
32. Метод прогонки.
33. Итерационные методы численного решения систем линейных уравнений. Метод простой итерации.
34. Методы Якоби и Зейделя.
35. Задача численного решения нелинейного уравнения. Отделение корней. Метод половинного деления (бисекций).
36. Метод хорд: расчётные формулы.
37. Метод хорд: сходимость и оценка погрешности.
38. Метод касательных (Ньютона): расчётная формула, сходимость и оценка погрешности.
39. Задача численного решения системы нелинейных уравнений. Метод Ньютона для нелинейных систем.
40. Упрощённый метод Ньютона для систем уравнений. Сходимость и оценка погрешности метода Ньютона.

41. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
Дискретизация задачи Коши. Решение разложением в ряд Тейлора.
42. Метод Эйлера и его модификации.
43. Методы Рунге-Кутты: определение и общие формулы. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка.
Правило Рунге оценки погрешности.
44. Методы прогноза и коррекции.
45. Методы Рунге-Кутты для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения высшего порядка.

Пример задания по теме "Численное интегрирование"

Вычисление интегралов по формулам парабол и Гаусса.

1. Для выбранной функции $y=f(x)$ и отрезка $[-1,1]$ вычислить интеграл. Затем для $n=2$ элементарных отрезков вычислить приближенное значение интеграла по формуле парабол. Вычислить приближенное значение интеграла по формуле Гаусса для двух точек.
2. Для выбранной функции $y=f(x)$ и отрезка $[a,b]$ вычислить интеграл. Затем для $n=3$ элементарных отрезков вычислить приближенное значение интеграла по формуле парабол. Вычислить приближенное значение интеграла по формуле Гаусса для трех точек.
3. В каждом случае проверить точное и приближенные значения интеграла для полиномов разных степеней. Для 1-го случая проверку осуществить для полиномов степени от 2 до 4. Для 2-го случая проверку осуществить для полиномов степени от 4 до 6.

12. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины

При преподавании данной дисциплины следует ориентироваться на практическую применимость изучаемых методов. Вместе с тем нужно уделять должное внимание изучению математического аппарата, лежащего в основе всех методов вычислительной математики. Это особенно важно при изложении общей идеологии решения задач определённого класса. Студенты должны хорошо усвоить теоретические основы используемых методов и то, как конкретный алгоритм вписывается в общую систему методов данной проблематики.

При изложении каждого численного метода нужно придерживаться следующей последовательности: постановка задачи (исходные данные и требуемый результат), анализ задачи (корректность, обусловленность, возможные трудности решения), общая схема решения с обоснованием (используемый математический аппарат), вывод формул, определение алгоритма решения, оценка погрешностей результата, практические замечания по применению метода, сравнение с другими методами, изложение достоинств и недостатков. Эти пункты в

основном соответствуют этапам решения реальных инженерных вычислительных задач, поэтому важно, чтобы студенты привыкали к грамотному основательному подходу к задаче уже при обучении численным методам её решения.

На практических занятиях применяется «ручной» счёт, т.е. решение вычислительных задач с помощью калькулятора (или программы Excel). Это должно способствовать лучшему пониманию студентами алгоритма получения результата, внутреннего механизма работы метода. Некоторые особо важные темы проходятся дважды: сначала «вручную» на практическом занятии, затем на лабораторной работе с помощью компьютера.

13. Адаптация рабочей программы для лиц с ОВЗ

Адаптированная программа разрабатывается при наличии заявления со стороны обучающегося (родителей, законных представителей) и медицинских показаний (рекомендациями психолого-медико-педагогической комиссии). Для инвалидов адаптированная образовательная программа разрабатывается в соответствии с индивидуальной программой реабилитации.